УДК 539.3

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЗВ'ЯЗАНОЇ ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ ТА ІЗОТРОПНИХ СИСТЕМ

Є. Іваник, к.ф.-м.н.
Львівський національний аграрний університет
Я. Коляно, к.ф.-м.н.
Українська академія друкарства
О. Сікора, к.т.н.
Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка

Ключові слова: температура, температурні напруження, узагальнені функції, кусково-однорідні тіла, ізотропія, анізотропія.

З використанням алгебри асиметричних узагальнених функцій сформульовано і доведено теорему єдиності розв'язку незв'язаної динамічної задачі термопружності ізотропних та анізотропних кусково-однорідних тіл.

Постановка проблеми. Дослідження термопружних процесів в анізотропних пружних середовищах за різного роду теплових дій має важливе значення. Такого роду задачі виникають в електронній промисловості під час розрахунку елементів кострукцій електровакуумних приладів, у практиці виготовлення склоізоляторів, під час розрахунку будівельних конструкцій та в інших галузях сучасної техніки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розгляду загальних питань задачі термопружності однорідних ізотропних і анізотропних однорідних тіл присвячено роботи [1-7]. Меншою мірою досліджено питання задачі термопружності неоднорідних систем, хоча теорія термопружності неоднорідного тіла є однією з основних проблем механіки деформівного твердого тіла [8]. Питанню дослідження та єдиності динамічної задачі термопружності неоднорідних середовищ присвячена робота Г. Фікера [9]. Аналогічні питання для анізотропних пружних неоднорідних тіл висвітлено в праці Р. Гачечиладзе [10].

Постановка завдання. Кусково-однорідні тіла, які складаються зі скінченного числа складових із різними, але сталими в межах кожної області фізико-механічними характеристиками, з'єднаних таким чином, що між ними здійснюється ідеальний термомеханічний контакт, знаходять широке застосування в техніці. Наприклад, армування дозволяє помітно підвищити експлуатаційні властивості конструкційних елементів, а застосування біметалів дало змогу створити зварні з'єднання в суднобудуванні, будівництві, хімічному машинобудувані тощо.

Для задач термопружності кусково-однорідних тіл виникає необхідність розглядати розривні поля параметрів напружено-деформованого стану, оскільки праві частини відповідних рівнянь математичної моделі мають особливості (зокрема, розриви). Тому для такого роду задач класична постановка вже не прийнятна. У цьому разі вводять у розгляд так звані узагальнені розв'язки [11-14].

Виклад основного матеріалу. Розглянемо кусково-однорідне пружне ізотропне суцільне середовище, яке займає обмежену область V у просторі $\Re^3$ з межею $S = \partial V$. Припустимо, що область V містить низку підобластей V_m з граничними поверхнями S_m $(m = 1,\dots,n)$, що не перетинаються. Область основного матеріалу (матриці) позначимо V_0, межа якої $S_0 = \partial V_0$, $S_0 = \widetilde{S}_0 \cup S_1 \dots \cup S_n$, де $\widetilde{S}_0$ – ділянка границі S_0, що збігається з тією частиною граничної поверхні S, на якій задаються крайові умови.

В області V визначені параметри напружено-деформованого стану: температурне поле $t(x,\tau)$, тензор напружень $\sigma_{ij}(x,\tau)$, вектор переміщень $u_i(x,\tau)$, причому $x = (x_1, x_2, x_3)$ – декартові координати актуального стану, τ – час, які в області, зайнятій тілом, є кусково-неперервними, бо мають граничне значення при прямуванні до межі, на якій фізико-механічні характеристики мають розрив. Доведемо теорему єдиності незв'язаної динамічної задачі термопружності кусково-однорідного анізотропного тіла, яка вказує достатні умови для існування єдиного розв'язку, за умови, що його існування вже обумовлене.

Теорема. Припустимо, що в кусково-однорідному середовищі V тривимірного векторного простору з кусково-гладкою межею S, яке містить низку включень V_m $(m = 1,\dots,n)$, які не перетинаються, задано кусково-неперервні функції $\sigma_{ij}(x,\tau) \in C^1(\overline{V}_0) \cap C^1(\overline{V}_1) \dots \cap C^1(\overline{V}_n)$, $t(x,\tau)$, $u_i(x,\tau) \in C^2(\overline{V}_0) \cap C^2(\overline{V}_1) \dots \cap C^2(\overline{V}_n)$, $\tau \geq 0$, які задовольняють наступні рівняння і залежності:

$$\sigma_{ij,j} + \rho(x) F_i = \rho(x)\ddot{u}_i; \tag{1}$$

$$\left(\lambda_t(x) t_{,j}\right)_{,j} = c_v(x)\dot{t} - w_t(x,t); \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu(x) e_{ij} + \left[\lambda(x) e_{kk} - \beta(x) t\right]\delta_{ij},\ x \in V; \tag{3}$$

$$\lambda_t(x) t_{,j} n_j + \alpha_s(x)\left(t - t_c^S\right) = 0,\ x \in S; \tag{4}$$

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma_0(x,\tau),\ x \in S_\sigma; \tag{5}$$

$$u_i = u_0(x,\tau),\ x \in S_u,\ S_\sigma \cup S_u = S; \tag{6}$$

$$t = t_0(x),\ u_i = g_i(x),\ \dot{u} = G_i(x),\ x \in V,\ \tau = 0, \tag{7}$$

де $\rho(x)$ – густина; F_i – компоненти вектора масових сил; $\lambda_t(x)$, $c_v(x)$ – коефіцієнти теплопровідності та об'ємної теплоємності відповідно; w_t – густина теплових джерел, розподілених в об'ємі тіла; $\lambda(x)$, $\mu(x)$ – коефіцієнти пружності Ляме; e_{ij} – компоненти тензора пружних деформацій; $\beta(x) = (3\lambda(x) + 2\mu(x))\alpha_t(x)$; $\alpha_t(x)$ – температурний коефіцієнт лінійного розширення ізотропного тіла; δ_{ij} – символ Кронекера; $\alpha_S(x)$ – коефіцієнт теплообміну; t_c^S – температура навколишнього середовища; n_j – складові одиничного вектора зовнішньої нормалі до поверхні S у довільній точці $x \in S$; диференціювання по координаті позначається на рівні індексів з комою, повторюваний індекс означає підсумовування від 1 до 3; диференціювання за часом позначається крапкою.

На поверхнях спряження матриці, що займає область V_0, і включень V_m $(m = 1,\dots,n)$ виконуються умови:

$$t^{(0)}(x,\tau) = t^{(m)}(x,\tau),\ \lambda_{t(0)} t_{,j}^{(0)} \widetilde{n}_j^{(m)} = \lambda_{t(m)} t_{,j}^{(m)} \widetilde{\nu}_j^{(m)}; \tag{8}$$

$$u_i^{(0)}(x,\tau) = u_i^{(m)}(x,\tau),\ \sigma_{ij}^{(0)}(x,\tau)\widetilde{n}_j^{(m)} - \sigma_{ij}^{(0)}(x,\tau)\widetilde{\nu}_j^{(m)} = \sigma_i^{(m)}(x,\tau),\ x \in S_m. \tag{9}$$

В умовах (8)–(9) позначено: $\widetilde{n}_j^{(m)}$ – компоненти вектора зовнішньої нормалі до тієї частини поверхні S_0, що має спільну частину з поверхнями S_m $(m = 1,\dots,n)$; $\widetilde{\nu}_j^{(m)}$ – компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхонь S_m $(m = 1,\dots,n)$; $\sigma_i^{(m)}(x,\tau)$ – задані функції для точок граничних поверхонь S_m. Під виразом $f^{(k)}(x,\tau)$ розуміємо наступне: $f^{(k)}(x,\tau) = \lim\limits_{x' \to x} f^{(k)}(x',\tau),\ x \in S_m$.

У разі виконання зазначених умов розв'язок крайової задачі (1)−(7) єдиний у розглядуваних класах функцій.

Доведення сформульованої теореми проведемо від супротивного. Припустимо, що існують два розв'язки задачі $t^{(1)}(x,\tau),\ t^{(2)}(x,\tau)$; $\sigma_{ij}^{(1)}(x,\tau), \sigma_{ij}^{(2)}(x,\tau)$; $u_i^{(1)}(x,\tau), u_i^{(2)}(x,\tau)$, які задовольняють умови теореми. Тоді очевидно, що функції $\tilde{t} = t^{(1)}(x,\tau) - t^{(2)}(x,\tau)$; $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)}(x,\tau) - \sigma_{ij}^{(2)}(x,\tau)$; $\tilde{u}_i = u_i^{(1)}(x,\tau) - u_i^{(2)}(x,\tau)$ задовольняють відповідні однорідні рівняння за таких умов:

$$\lambda_t(x)\tilde{t}_{,j} n_j + \alpha_s(x)\tilde{t} = 0,\ x \in S,\ \tilde{\sigma}_{ij} n_j = 0,\ x \in S_\sigma; \tag{9}$$

$$\tilde{t} = 0,\ \tilde{u}_i = 0,\ \dot{\tilde{u}}_i = 0,\ x \in V,\ \tau = 0; \tag{10}$$

$$\tilde{t}^{(0)}(x,\tau) = \tilde{t}^{(m)}(x,\tau),\ \lambda_{t(0)} \tilde{t}_{,j}^{(0)} \tilde{n}_j^{(m)} = \lambda_{t(m)} \tilde{t}_{,j}^{(m)} \tilde{\nu}_j^{(m)},\ \tilde{u}_i^{(0)}(x,\tau) = \tilde{u}_i^{(m)}(x,\tau),$$
$$\tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}(x,\tau)\tilde{n}_j^{(m)} = \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}(x,\tau)\tilde{\nu}_j^{(m)},\ x \in S_m. \tag{11}$$

Розглянемо інтеграл виду $\int\limits_V \tilde{\sigma}_{ij}\, \dot{\tilde{e}}_{ij}\, dV$. Оскільки до області V не можна застосувати теорему Остроградського-Гаусса, то розіб'ємо її на підобласті $V_0, V_1, \ldots, V_n$, в кожній з яких поля напружень і деформацій неперервні і диференційовані [15], тобто

$$\int\limits_V \tilde{\sigma}_{ij}\, \dot{\tilde{e}}_{ij}\, dV = \int\limits_{V_1} \tilde{\sigma}_{ij}\, \dot{\tilde{e}}_{ij}\, dV + \int\limits_{V_2} \tilde{\sigma}_{ij}\, \dot{\tilde{e}}_{ij}\, dV + \ldots + \int\limits_{V_n} \tilde{\sigma}_{ij}\, \dot{\tilde{e}}_{ij}\, dV. \tag{12}$$

Розглянемо вирази виду $\int\limits_{V_m} \tilde{\sigma}_{ij}\, \dot{\tilde{e}}_{ij}\, dV\ (m = 0,1,\ldots,n)$. Представимо їх аналогічно [16]:

$$\int\limits_{V_0} \tilde{\sigma}_{ij}\, \dot{\tilde{e}}_{ij}\, dV = \int\limits_{V_0} \left[\left(\tilde{\sigma}_{ij}\dot{\tilde{u}}_i\right)_{,j} - \left(\tilde{\sigma}_{ij,j}\dot{\tilde{u}}_i\right)\right] dV = \int\limits_{S_0} \tilde{\sigma}_{ij}\dot{\tilde{u}}_i n_j\, dS + \int\limits_{S_1} \tilde{\sigma}_{ij}\tilde{n}_j^{(1)}\dot{\tilde{u}}_i\, dS + \ldots$$
$$+ \int\limits_{S_n} \tilde{\sigma}_{ij}\tilde{n}_j^{(n)}\dot{\tilde{u}}_i\, dS - \int\limits_{V_0} \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{2}\rho(x)\dot{\tilde{u}}_i\,\dot{\tilde{u}}_i\right) dV,$$

$$\int\limits_{V_m} \tilde{\sigma}_{ij}\, \dot{\tilde{e}}_{ij}\, dV = \int\limits_{V_m} \left[\left(\tilde{\sigma}_{ij}\dot{\tilde{u}}_i\right)_{,j} - \left(\tilde{\sigma}_{ij,j}\dot{\tilde{u}}_i\right)\right] dV = \int\limits_{S_m} \tilde{\sigma}_{ij}\dot{\tilde{u}}_i\tilde{\nu}_j^{(m)}\, dS - \int\limits_{V_m} \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{2}\rho(x)\dot{\tilde{u}}_i\,\dot{\tilde{u}}_i\right) dV,$$
$$(m = 1,\ldots,n). \tag{13}$$

Розділивши область V на підобласті, в яких мають місце розриви відповідних параметрів, які ліквідуємо з використанням умов (11), а також беручи до уваги, що напрями нормалей $\tilde{\nu}_j^{(m)}$ і $\tilde{n}_j^{(m)}$ взаємно протилежні, після почленного додавання рівностей (13) приходимо до залежностей виду

$$\int\limits_V \left[\tilde{\sigma}_{ij}\, \dot{\tilde{e}}_{ij} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{2}\rho(x)\dot{\tilde{u}}_i\,\dot{\tilde{u}}_i\right)\right] dV = 0. \tag{14}$$

Використавши залежність (3), перепишемо (14) у вигляді

$$\int\limits_V \left\{\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\lambda(x)}{2}\tilde{e}_{kk}^2 + \mu(x)\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{ij} + \frac{1}{2}\rho(x)\dot{\tilde{u}}_i\,\dot{\tilde{u}}_i\right] - \beta(x)\tilde{t}\dot{\tilde{e}}_{ii}\right\} dV = 0. \tag{15}$$

Спираючись на доведення теореми єдиності розв'язку рівняння теплопровідності параболічного типу з розривними коефіцієнтами, подане в роботі [17], можна стверджувати, що відповідний розв'язок задачі для знаходження $\tilde{t}$ буде тотожним нулем у всій області його визначення V, тобто $\tilde{t} \equiv 0$. Тому (15) перепишемо таким чином:

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\lambda(x)}{2}\tilde{e}_{kk}^2 + \mu(x)\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{ij} + \frac{1}{2}\rho(x)\dot{\tilde{u}}_i\,\dot{\tilde{u}}_i\right] dV = 0. \tag{16}$$

Під інтегралом (16) міститься алгебраїчний вираз, що складається з квадратів функцій, які є кусково-неперервними, і коефіцієнтів, які також мають стрибок на поверхні спряження. Враховуючи, що $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$, тому величини $u_{i,j}$ можуть містити особливості. Для $u_{i,j}$ маємо представлення [11]:

$$u_{i,j} = \left\{u_{i,j}\right\} + \sum_m \left[u_i\right]\Big\|_{S_m} \cos\left(\bar{\nu}_m, x_j\right)\delta_{S_m}, \tag{17}$$

причому в залежності (17) $\left\{u_{i,j}\right\}$ – класична похідна; $\left[u_i\right]\Big\|_{S_m}$ – стрибок функції u_i при переході через поверхню спряження S_m; δ_{S_m} – дельта-функція Дірака, породжена поверхнею спряження S_m; $\bar{\nu}_m$ – зовнішня нормаль до поверхні S_m. Оскільки згідно з умовами (11) $\left[u_i\right]\Big\|_{S_m} = 0$, то $u_{i,j} = \left\{u_{i,j}\right\}$. Отже, вираз під інтегралом (16) не містить особливостей. Кусково-сталі коефіцієнти $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\rho(x)$ з фізичних передумов є додатними, тому вираз під інтегралом (16) також додатний. Враховуючи, що початкові умови (10) однорідні, можна стверджувати, що інтеграл у лівій частині залежності (16) у початковий момент $\tau = 0$ дорівнює нулю. Таким чином,

$$\int_V \left[\frac{\lambda(x)}{2}\tilde{e}_{kk}^2 + \mu(x)\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{ij} + \frac{1}{2}\rho(x)\dot{\tilde{u}}_i\,\dot{\tilde{u}}_i\right] dV = 0. \tag{18}$$

Звідси випливає, що $\tilde{e}_{ij} = 0$, $\tilde{u}_i = 0$, тому $\tilde{\sigma}_{ij} = 0$, тобто розв'язки $t^{(1)}(x,\tau)$, $t^{(2)}(x,\tau)$; $\sigma_{ij}^{(1)}(x,\tau), \sigma_{ij}^{(2)}(x,\tau)$; $u_i^{(1)}(x,\tau)$, $u_i^{(2)}(x,\tau)$ тотожні.

Поширимо сформульовану теорему на випадок багатошарового анізотропного тіла, що займає область V з межею S і складається з n різнорідних зістикованих елементів V_m $(m = 1,\ldots,n)$, межі яких $S_m = \partial V_m$. Поверхні, через які здійснюється контакт між двома суміжними шарами, позначимо S_{k-1k} $(k = 2,\ldots,n)$; $\tilde{S}_m$ – частина поверхні S_m, яка має спільну межу з граничною поверхнею S, тобто $S = \bigcup_m \tilde{S}_m$. Вважаємо, що спряжені шари володіють прямолінійною анізотропією. У цьому разі в умовах доведеної теореми замість залежностей і рівнянь (2), (3), (8) треба покласти

$$\left(\lambda_{ij}^t\, t_{,i}\right)_{,ij} = c_v\,\dot{t} - w_t\,; \tag{19}$$

$$t\big|_S = t_{01}(x,\tau),\ t\big|_{\tau=0} = t_{02}(x)\,; \tag{20}$$

$$t^{(m)}(x,\tau) = t^{(m+1)}(x,\tau),\ \lambda_{ij}^{t(m)} n_i^{(m\,m+1)} t_{,j}^{(m)}(x,\tau) = \lambda_{ij}^{t(m+1)} n_i^{(m+1\,m)} t_{,j}^{(m+1)}(x,\tau),$$
$$x \in S_{m\,m+1}\ \ (m = 1,\ldots,n-1), \tag{21}$$

де $n_i^{(m\,m+1)}$ – компоненти вектора зовнішньої нормалі до області V_m, спрямованої в бік області V_{m+1}; фізико-механічні характеристики розглядуваного тіла змінюються в одному напрямі, наприклад, у напрямі аксіальної осі Ox_3.

Аналогічно до попереднього, використавши співвідношення Дюгамеля-Неймана для анізотропного тіла [18]

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\,e_{kl} - \beta_{ij}\,t\,,$$

залежність (17) перепишеться так:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(c_{ijkl}\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{kl} + \frac{1}{2}\rho(x)\dot{\tilde{u}}_i\,\dot{\tilde{u}}_i\right) - \beta_{ij}\tilde{t}\,\dot{\tilde{e}}_{ij}\right] dV = 0. \tag{22}$$

Для встановлення єдиності розв'язку крайової задачі для анізотропного кусково-однорідного тіла розглянемо вираз вигляду

$$\int_V \tilde{t}\left(\lambda_{ij}^t \tilde{t}_{,i}\right)_{,j} dV = 0. \tag{23}$$

Очевидно, що має місце рівність

$$\int_V \tilde{t}\left(\lambda_{ij}^t \tilde{t}_{,i}\right)_{,j} dV = \int_{V_1} \tilde{t}\lambda_{ij}^{t(1)}\tilde{t}_{,ij}\, dV + \ldots + \int_{V_n} \tilde{t}\lambda_{ij}^{t(n)}\tilde{t}_{,ij}\, dV. \tag{24}$$

Оскільки в межах кожної з підобластей V_m функція $\widetilde{t}$ неперервна і задовольняє рівняння виду $\lambda_{ij}^{t(m)}\widetilde{t}_{,ij} = c_v^{(m)}\dot{\widetilde{t}}$, то згідно з результатами роботи [19] відповідним вибором системи координат його можна звести до вигляду

$$\Delta^{(m)}\widetilde{t} = \frac{1}{a^{(m)}}\dot{\widetilde{t}}\,, \tag{25}$$

тобто до виду, як і у випадку ізотропного тіла; в (25) $\Delta^{(m)}$ − оператор Лапласа в кожній з підобластей V_m; $a^{(m)}$ − коефіцієнт температуропровідності.

Тому (24) перепишемо у вигляді

$$\int\limits_V \widetilde{t}\left(\lambda_{ij}^t\widetilde{t}_{,i}\right)_{,j} dV = \int\limits_{V_1} \widetilde{t}\Delta^{(1)}\widetilde{t}\, dV + \ldots + \int\limits_{V_n} \widetilde{t}\Delta^{(n)}\widetilde{t}\, dV\,. \tag{26}$$

Застосуємо у співвідношенні (26) до кожної зі складових першу формулу Гріна [20], в результаті чого дістанемо

$$\begin{aligned} &\int\limits_{V_1} \widetilde{t}\Delta^{(1)}\widetilde{t}\, dV = -\int\limits_{V_1}\left(\Delta^{(1)}\widetilde{t}\right)^2 dV + \int\limits_{S_1}\widetilde{t}\frac{\partial\widetilde{t}}{\partial n}dS + \int\limits_{S_{21}}\widetilde{t}^{(1)}\frac{\partial\widetilde{t}}{\partial n^{(12)}}dS\,,\\ &.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\\ &\int\limits_{V_n} \widetilde{t}\Delta^{(n)}\widetilde{t}\, dV = -\int\limits_{V_n}\left(\Delta^{(n)}\widetilde{t}\right)^2 dV + \int\limits_{S_n}\widetilde{t}\frac{\partial\widetilde{t}}{\partial n}dS + \int\limits_{S_{n-1\,n}}\widetilde{t}^{(n)}\frac{\partial\widetilde{t}}{\partial n^{(n\,n-1)}}dS\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Тут $\Delta^{(m)}\widetilde{t}$ − градієнт функції $\widetilde{t}$ у відповідній області V_m. Додавши почленно залежності (27), врахувавши, що $\dfrac{\partial\widetilde{t}}{\partial n^{(m\,m-1)}} = -\dfrac{\partial\widetilde{t}}{\partial n^{(m-1\,m)}}$ і $t\big|_{\widetilde{S}_m} = 0$, матимемо

$$\begin{aligned} &\int\limits_{V_1} \widetilde{t}\Delta^{(1)}\widetilde{t}\, dV + \ldots + \int\limits_{V_n} \widetilde{t}\Delta^{(n)}\widetilde{t}\, dV = -\int\limits_{V_1}\left(\Delta^{(1)}\widetilde{t}\right)^2 dV - \ldots - \int\limits_{V_n}\left(\Delta^{(n)}\widetilde{t}\right)^2 dV +\\ &\qquad + \int\limits_{S_{12}}\frac{\partial\widetilde{t}}{\partial n^{(12)}}\left(\widetilde{t}^{(1)} - \widetilde{t}^{(2)}\right)dS + \ldots + \int\limits_{S_{n-1\,n}}\frac{\partial\widetilde{t}}{\partial n^{(n-1\,n)}}\left(\widetilde{t}^{(n-1)} - \widetilde{t}^{(n)}\right)dS\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Беручи до уваги умови спряження (21), з (28) отримуємо

$$\int\limits_{V_1} \widetilde{t}\Delta^{(1)}\widetilde{t}\, dV + \ldots + \int\limits_{V_n} \widetilde{t}\Delta^{(n)}\widetilde{t}\, dV = -\int\limits_{V_1}\left(\Delta^{(1)}\widetilde{t}\right)^2 dV - \ldots - \int\limits_{V_n}\left(\Delta^{(n)}\widetilde{t}\right)^2 dV\,. \tag{29}$$

З (25) випливає, що залежність (29) можна подати у вигляді

$$\int\limits_{V_1}\frac{\widetilde{t}\dot{\widetilde{t}}}{a^{(1)}}dV + \ldots + \int\limits_{V_n}\frac{\widetilde{t}\dot{\widetilde{t}}}{a^{(n)}}dV = -\int\limits_{V_1}\left(\Delta^{(1)}\widetilde{t}\right)^2 dV - \ldots - \int\limits_{V_n}\left(\Delta^{(n)}\widetilde{t}\right)^2 dV\,. \tag{30}$$

Оскільки має місце $\widetilde{t}\dot{\widetilde{t}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial\tau}\left(\widetilde{t}\,\widetilde{t}\right)$, то (30) запишеться так:

$$\int\limits_{V_1}\left[\frac{\widetilde{t}^2}{a^{(1)}} + 2\int\limits_0^\tau\left(\Delta^{(1)}\widetilde{t}\right)^2\right]dV + \ldots + \int\limits_{V_n}\left[\frac{\widetilde{t}^2}{a^{(n)}} + 2\int\limits_0^\tau\left(\Delta^{(1)}\widetilde{t}\right)^2\right]dV = 0\,. \tag{31}$$

На основі однорідних початкових умов, а також врахувавши, що кожний з підінтегральних виразів є додатно визначена функція, дійдемо висновку, що (31) виконується лише за умови, що $\widetilde{t} \equiv 0$, $x \in V_m$ $(m = 1,\ldots,n)$, і звідси $\widetilde{t} \equiv 0$, $x \in V$. Тому (22) можна подати у вигляді

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial\tau}\left(c_{ijkl}\widetilde{e}_{ij}\widetilde{e}_{kl} + \frac{1}{2}\rho(x)\dot{\widetilde{u}}_i\,\dot{\widetilde{u}}_i\right)dV = 0\,. \tag{32}$$

З формули (32) видно, що $\widetilde{e}_{ij} = 0$, а тому $\widetilde{u}_i = 0$, $\widetilde{\sigma}_{ij} = 0$, тобто розв’язок динамічної задачі термопружності для анізотропного кусково-однорідного тіла також є єдиним.

Висновки. На сучасному етапі розвитку науки і техніки композитні матеріали дістають дедалі більше поширення в багатьох галузях виробництва. Більшість конструкцій у процесі експлуатації зазнає різких інтенсивних теплових навантажень. Тому проектувальнику або конструктору важливо, крім експериментальних даних, мати також результати теоретичних досліджень, які можна отримати на основі розв’язків нестаціонарних задач теплопровідності та відповідних динамічних задач термопружності для кусково-однорідних анізотропних тіл за розривних граничних умов. При цьому слід мати впевненість, що побудовані тим чи іншим методом розв'язки існують і є єдині. У статті сформульовано й доведено теорему єдиності незв'язаної динамічної задачі термопружності для кусково-однорідних ізотропних і багатошарових анізотропних тіл.

Бібліографічний список

1. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Д. Уэйнер. – М. : Мир, 1964. – 517 с.
2. Кохниашвили Н. С. Некоторые оценки в теории термоупругости / Н. С. Кохниашвили // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1972. − Т.65, № 3. – С. 547−550.
3. Коляно Ю. М. Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно-однородных тел / Ю. М. Коляно // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978. – Вып. 7. − С. 7−11.
4. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. – М. : Наука, 1984. – 338 с.
5. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. − М. : Мир, 1975. − 872 с.
6. Knops R. Uniqueness in classical elastodynamics / R. Knops, L. Payne // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1967. – V. 2, N 5. – P. 349−355.
7. Knops R. On uniqueness and continuous dependence in dynamical problems of linear thermoelasticity / R. Knops, L. Payne // Int. J. Solids and Struct. – 1970. – V. 6, N 8. – P. 1173−1184.
8. Ильюшин А. А. Две проблемы механики твердого деформируемого тела (МТДТ) / А. А. Ильюшин // Тр. Всесоюз. конф. по уравнениям с частными производными. – М. : Изд-во МГУ, 1978. – С. 127−130.
9. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости / Г. Фикера. – М. : Мир, 1974. – 159 с.
10. Гачечиладзе Р. И. Гранично-контактные задачи динамики теории упругости для анизотропных неоднородных упругих сред / Р. И. Гачечиладзе // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1979. − Т. 94, № 1. – С. 37−40.
11. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
12. Соболев С. Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. – М. ; Л.: Гостехиздат, 1950. – 424 с.
13. Антосик П. Теория обобщенных функций : секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. – М. : Мир, 1976. – 311 с.
14. Кеч В. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике / В. Кеч, П. Теодореску. – М. : Мир, 1978. – 518 с.
15. Абовский Н.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н. П. Абовский, Н. П. Андреев, А. П. Деруга. – М. : Наука, 1974. – 432 с.
16. Ionescu-Casimir V. Problem of linear thermoelasticity. Uniqueness theorems / V. Ionescu-Casimir // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. techn. – 1964. – V. 12, N 12. – P. 847−851.
17. Самарский А. А. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами / А. А. Самарский // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 121, № 2. – С. 225−228.
18. Фурухаси Р. О существовании и единственности решения задачи термоупругости для неоднородной анизотропной среды / Р. Фурухаси // Jap. Soc. Mech. Eng. – 1972. – V. 38, N 315. – P. 2822−2824.
19. Галицын А. С. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности / А. С. Галицын, А. Н. Жуковский. − К. : Наук. думка, 1976. – 284 с.
20. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1974. – 432 с.

Иваник Е., Коляно Я., Сикора О. О единственности решения несвязанной динамической задачи термоупругости кусочно-однородных анизотропных и изотропных систем

С использованием алгебры асимметричных обобщенных функций сформулирована и доказана теорема едиственности решения несвязанной динамической задачи термоупругости изотропных и анизотропных кусочно-однородных тел.

Ключевые слова: температура, температурные напряжения, обобщенные функции, кусочно-однородные тела, изотропия, анизотропия.

Ivanyk E., Kolyano Ya., Sikora O. **On the uniqueness solution of the noncoupled dynamical thermoelasticity problem of the piece-wise anisotropic and isotropic system**

According to the algebra of asymmetric generalized function the theorem of uniqueness of the solution of noncoupled dynamical problem of thermoelasticity for anisotropic and isotropic piece-wise bodies are formulated and proof.

Key words: temperature, thermal stresses, generalized function, piece-wise bodies, isotropy, anisotropy.